Το κόστος της Αναρχίας και το Παράδοξο του Braess

Ιωάννης Γαβιώτης, igaviotis@gmail.com

24 Νοεμβρίου 2015

Περίληψη

Κοιτώντας τα περιεχόμενα του τεύχους Οκτωβρίου 2015 στη *Journal of the ACM*, ο τίτλος ενός άρθρου μου κέντρισε το ενδιαφέρον: «Η εγγενής ευρωστία του κόστους αναρχίας» του Tim Roughgarden ([Rou15]). Τελικά από το άρθρο διάβασα μόνο την εισαγωγή και τα συμπεράσματα, αλλά η ιδέα (και ο όρος 'κόστος αναρχίας') αποδείχθηκαν όντως χρήσιμα και με πολιτικο-οικονομικές προεκτάσεις.

Στο παρόν άρθρο το κόστος αναρχίας χρησιμοποιείται για να 'ποσοτικοποιήσει' το δίλημμα του κρατουμένου, ένα κλασικό παιχνίδι στη θεωρία παιγνίων. Το 1968 ο μαθηματικός Dietrich Braess παρατήρησε ότι το άνοιγμα ενός νέου δρόμου σε ένα οδικό δίκτυο, παραδόξως, επιδεινώνει το μποτιλιάρισμα. Και στις δυο περιπτώσεις η ελευθερία επιλογής, παρότι οδηγεί ωφελιμιστικά στην επιδίωξη του ατομικού οφέλους και το νομιμοποιεί ηθικά, καταλήγει νομοτελειακά στην απομείωση τόσο του κοινωνικού, όσο και του ατομικού οφέλους!

1 Δίλημμα του Κρατουμένου

Δυο υπόδικοι έχουν συλληφθεί και η αστυνομία τους προσφέρει το ακόλουθο deal: αν καρφώσεις τον άλλο, ενώ εκείνος κρατά το στόμα του κλειστό, θα αφεθείς ελεύθερος και εκείνος θα φάει 3 χρόνια. Αν σε καταδώσει και εκείνος, θα μοιραστείτε ποινή 2 ετών. Τέλος, αν και οι δυο κρατήσετε το στόμα σας κλειστό, θα τη σκαπουλάρετε με μια μικρή ποινή ενός έτους. Οι κανόνες του παιχνιδιού απεικονίζονται στον Πίνακα 1, όπου το όφελος μετριέται με αρνητικούς αριθμούς, διότι αντιστοιχεί σε έτη φυλάκισης.

		p_2 επιλέγει	
	όφελος p_1, p_2	Σ	Κ
p_1	Σ(υνεργασία)	-1, -1	-3, 0
επιλέγει	Κ(άρφωμα)	0, -3	-2, -2

Πίνακας 1: Χρόνια στη φυλακή για κάθε κρατούμενο

Αρχικά φαίνεται ότι η επιλογή της συνεργασίας είναι συμφερτική, αλλά και δίκαια· όχι πως αυτό μετράει όταν είσαι υπόδικος. Ωστόσο, έχοντας πλήρη γνώση της προτεινόμενης συμφωνίας, σύμφωνα με την κοινή λογική και με άξονα τη μεγιστοποίηση του ατομικού του οφέλους, ο κάθε κρατούμενος σκέφτεται ως εξής: αν ο άλλος κρατήσει το στόμα του κλειστό, το μεγαλύτερο όφελος για μένα είναι να τον καρφώσω, γιατί θα φύγω ελεύθερο πουλί. Αν ο άλλος με καρφώσει, τότε, πάλι με συμφέρει να τον καρφώσω, γιατί θα φάω μόνο 2 χρονάκια, ενώ αλλιώς θα έμενα στη στενή 3 χρόνια. Άρα σε κάθε περίπτωση με συμφέρει να καρφώσω και μάλιστα χωρίς να οδηγούμαι από εκδικητικότητα, αλλά με μόνο γνώμονα το συμφέρον μου. Αναλόγως σκεπτόμενος, και ο άλλος κρατούμενος θα επιλέξει το κάρφωμα—no hard feelings. Αυτή η επιλογή ονομάζεται **αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική** (strictly dominant strategy) και είναι ένα **σημείο καθαρής ισορροπίας Nash** (pure Nash equilibrium).

Το δίλημμα προκύπτει επειδή *όλοι* οι κρατούμενοι θα κέρδιζαν, αν κρατούσαν το στόμα τους κλειστό και συνεργαζόντουσαν. Αυτό που τους αποτρέπει είναι ότι θεωρούν δεδομένο τον ορθολογικό τρόπο λήψης αποφάσεων των συγκρατουμένων τους, άρα όλοι θα επιλέξουν το κάρφωμα. Ούτε και κανένας είναι σίγουρος για τη φερεγγυότητα των υπόλοιπων, σε περίπτωση που θα συνεννοούνταν να συνεργαστούν[1].

Είναι ιστορικά ενδιαφέρον ότι η ονομασία και το σενάριο για το 'Δίλημμα του Κρατουμένου' δόθηκαν εκ των υστέρων από τον μαθηματικό Albert Tucker. Το αρχικό σενάριο με αυτά τα χαρακτηριστικά που υπήρξε αντικείμενο μελέτης στο ινστιτούτο στρατηγικών μελετών RAND τη δεκαετία του '50 από τους Merrill Flood και Melvin Dresher ήταν η μελέτη και ο χειρισμός της πυρηνικής ισορροπίας τρόμου στον ψυχρό πόλεμο ΗΠΑ-ΕΣΣΔ. Αντιλαμβάνεστε ποιο ήταν το παιγνιοθεωρητικό αποτέλεσμα με βάση την ισορροπία Nash: το προληπτικό πρώτο πλήγμα και/ή ο αμοιβαία πυρηνική καταστροφή! Ευτυχώς που δεν εισακούστηκαν οι προτάσεις των μαθηματικών.

Πίσω στο παιχνίδι, το συνολικό κόστος για την ισορροπία Nash είναι 4 έτη, ενώ το μικρότερο δυνατό κόστος του παιχνιδιού είναι 2 έτη στην περίπτωση συνεργασίας. Ο λόγος της (χειρότερης) ισορροπίας Nash προς την βέλτιστη στρατηγική ονομάζεται **κόστος αναρχίας** ([Mal11]). Ονομάστηκε έτσι το 2001 από

[1] Βέβαια, το παιχνίδι αλλάζει αν οι κρατούμενοι είναι μαφιόζοι, δες Omertà ([Gav15]).

τον Χρήστο Παπαδημητρίου, θεωρητικό της Πληροφορικής, γιατί είναι πιο ακριβής και πιασάρικος τίτλος από το 'κλάσμα συνεργασίας' που είχε αρχικά προταθεί ([Kou99]). Το κόστος αναρχίας για το δίλημμα του κρατουμένου όπως παρουσιάστηκε είναι 2, αλλά μπορεί να γίνει ανεξέλεγκτα υψηλό, διατηρώντας αναλλοίωτο το χαρακτήρα του παιχνιδιού ([Gav15]).

Αν ένα παιχνίδι έχει κόστος αναρχίας κοντά στη μονάδα, τότε η επιδίωξη του ατομικού συμφέροντος δεν αντιστρατεύεται την κοινή ωφέλεια. Σε τέτοιες περιπτώσεις η επίδειξη αλτρουισμού είναι τσάμπα μαγκιά. Αντιθέτως, παιχνίδια με μεγάλο κόστος αναρχίας είναι εκείνα που ωθούν λογικούς παίκτες σε στρατηγικές ασύμβατες με το συμφέρον τους, ελλείψει συνεννόησης και συντονισμού. Άρα η αναρχία, η ανυπαρξία κανόνων και κανονισμών, το laissez faire, η απουσία κεντρικού σχεδιασμού σε τέτοιες περιπτώσεις, εξαναγκάζουν σε συμπεριφορές με μειωμένο κοινωνικό, αλλά και ατομικό όφελος.

Το δίλημμα του κρατουμένου έχει προταθεί ([New92]) ως μοντέλο που απεικονίζει καταστάσεις όπως

- τη νομή των δημόσιων αγαθών, με πρόβλημα τη χρήση τους από τους φοροφυγάδες, ή
- την αποτελεσματικότητα της συλλογικής δράσης, με πρόβλημα την αποχή των κοπανατζήδων από τις πορείες.

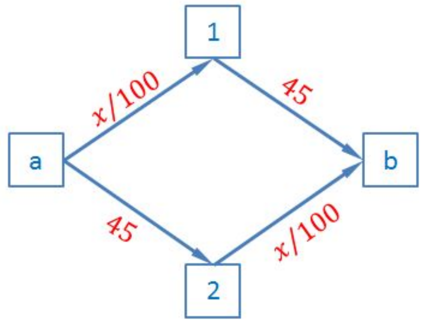
2 Μποτιλιάρισμα

Στο οδικό δίκτυο του Σχήματος 1 τα αυτοκίνητα ξεκινούν από το σημείο a με προορισμό το σημείο b και μπορούν να κινηθούν ακολουθώντας δύο εναλλακτικές διαδρομές που περνούν από τα σημεία 1 και 2. Στους κλάδους a1 και b2 παρουσιάζεται κυκλοφοριακή συμφόρηση όταν διέρχονται πολλά αυτοκίνητα. Η διάρκεια του ταξιδιού αυξάνεται όσο μεγαλώνει το πλήθος των αυτοκινήτων: για x αυτοκίνητα ο χρόνος της διαδρομής είναι $x/100$ λεπτά. Αντίθετα, οι άλλοι κλάδοι έχουν πολλές λωρίδες κυκλοφορίας και ο χρόνος διέλευσης είναι σταθερός, 45 λεπτά.

Από τα C αυτοκίνητα που ξεκινούν, έστω ότι τα i ακολουθούν τη διαδρομή a1b. Αυτά θα φτάσουν σε $\frac{i}{100}+45$ λεπτά στον προορισμό. Τα υπόλοιπα $C-i$ αυτοκίνητα ακολουθούν τον a2b και φτάνουν σε $45+\frac{C-i}{100}$ λεπτά στον προορισμό. Συνολικά, όλα τα αυτοκίνητα θα ταξιδεύουν για

$$
\begin{aligned}
T_1(i) &= i.(\frac{i}{100}+45)+(C-i).(45+\frac{C-i}{100}) \\
&= \frac{i^2}{50}-\frac{C.i}{50}+C.(\frac{C}{100}+45)
\end{aligned}
$$

λεπτά, ή κατά μέσο όρο κάθε αυτοκίνητο



Σχήμα 1: Το απλό οδικό δίκτυο με τους χρόνους διαδρομής για x αυτοκίνητα

$$M_1(i)=\frac{T_1(i)}{C}=\frac{i^2}{50C}-\frac{i}{50}+(\frac{C}{100}+45)$$

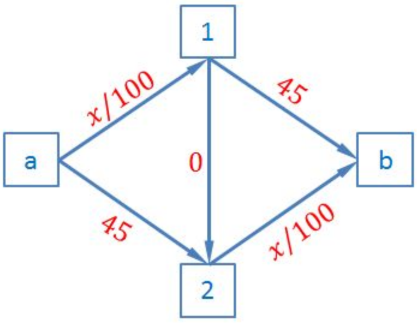
λεπτά. Το ελάχιστο αυτής της παραβολής είναι στο $M_1'(i)=\frac{i}{25C}-\frac{1}{50}=0$, δηλαδή όταν $i=\frac{C}{2}$. Άρα η καλύτερη κατανομή των αυτοκινήτων είναι να μοιραστούν μισά-μισά στους δυο κλάδους και τότε ο μέσος όρος της διαδρομής είναι $M_1(\frac{C}{2})=\frac{C}{200}+45$.

Βέβαια, για να επιτευχθεί αυτή η λύση χρειάζεται ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου να στρίβει ένα τίμιο νόμισμα (50-50) και να επιλέγει κλάδο σύμφωνα με το κορώναγράμματα. Ή πρέπει να υπάρχει ένας τροχονόμος που να ισομοιράζει τα αυτοκίνητα στους δυο κλάδους. Η διαφορά με το δίλημμα του κρατουμένου είναι ότι τα αυτοκίνητα θα ακολουθήσουν τις οδηγίες του τροχονόμου εθελοντικά, διότι ξέρουν ότι έτσι θα φτάσουν σε συντομότερο χρόνο απ' ότι αν τις παραβούν. Οι κρατούμενοι, ακόμη κι αν είχαν έναν έντιμο δικηγόρο να τους προτρέπει να συνεργαστούν, θα εξωθούνταν στο αλληλοκάρφωμα λόγω έλλειψης εξασφάλισης.

Η λύση που επιτυγχάνεται με το νόμισμα τεχνικά ονομάζεται **μικτή ισορροπία Nash** (mixed Nash equilibrium) και είναι η επωφελέστερη (utalitarian). Περαιτέρω τυγχάνει να εξασφαλίζει και την ισότητα (egalitarian), αφού όλα τα αυτοκίνητα, ανεξαρτήτως διαδρομής, ταξιδεύουν τον ίδιο ακριβώς χρόνο. Για παράδειγμα, αν είχαμε $C=4000$ αυτοκίνητα, τόσο τα 2000 που θα ακολουθούσαν τη διαδρομή a1b, όσο και τα υπόλοιπα 2000 που θα έπαιρναν την a2b, θα έφταναν στο τέρμα σε 65 λεπτά. Το κόστος αναρχίας γι' αυτό το παιχνίδι είναι 1, δηλ. το ελάχιστο δυνατό, αφού το (έστω μικτό) σημείο ισορροπίας Nash συμπίπτει με τη βέλτιστη λύση.

2.1 Το Παράδοξο του Braess

Με καλή πρόθεση, ο νομάρχης παραδίδει στην κυκλοφορία ένα νέο δρόμο και το οδικό δίκτυο διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Ο νέος δρόμος είναι ταχείας κυκλοφορίας (χωρίς διόδια άραγε;) και τα αυτοκίνητα τον διασχίζουν σε 0 λεπτά.



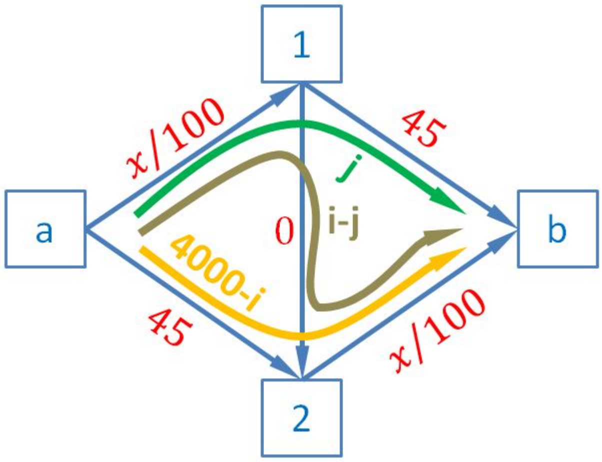
Σχήμα 2: Το οδικό δίκτυο με το νέο δρόμο

Ας παίξουμε το παιχνίδι με τους ίδιους όρους όπως παραπάνω για $C = 4000$ αυτοκίνητα. Τώρα οι οδηγοί που ξεκινούν από το a θα προτιμήσουν τη διαδρομή a1, αφού ξέρουν ότι, ακόμη και όλοι τους να τον διαλέξουν, θα φτάσουν στο σημείο 1 σε 40 λεπτά· κανένας τους δεν θα διάλεγε τη διαδρομή a2 που απαιτεί 45 λεπτά. Έτσι κι αλλιώς αν για να συνεχίσουν το ταξίδι τους χρειαστεί μελλοντικά να διασχίσουν τον κλάδο 12, αυτό δεν κοστίζει τίποτα (ζήτω ο νομάρχης). Και ακριβώς αυτό κάνουν αφού, συνωστιζόμενοι στο 1 συνειδητοποιούν ότι για να φτάσουν στο σημείο b, συντομότερη διαδρομή είναι η 12b που διαρκεί 40 λεπτά· κανείς δεν διαλέγει τη διαδρομή 1b που απαιτεί 45 λεπτά. Έτσι όλα τα αυτοκίνητα κοιτώντας πώς θα φτάσουν συντομότερα ακολούθησαν τη διαδρομή a12b. Μόνο που τους πήρε 40+40=80 λεπτά. Ουπς, μα στο οδικό δίκτυο του Σχήματος 1 χωρίς το νέο δρόμο χρειαζόταν μόνο 65 λεπτά!

Αυτό το παράδειγμα παρουσιάστηκε το 1968 από τον Γερμανό μαθηματικό Dietrich Braess. Η συμπεριφορά των αυτοκινήτων που περιγράψαμε οδήγησε σε χειρότερο αποτέλεσμα, παρότι τα αυτοκίνητα επέλεξαν την καλύτερη διαθέσιμη διαδρομή για να μεγιστοποιήσουν το ατομικό τους όφελος. Τι θα γινόταν αν δεν επικρατούσε αναρχία, αλλά αυτοθυσία και συντονισμός; Ξέρουμε ήδη μια καλή λύση από την προηγούμενη ενότητα, που αποδίδει χρόνο διαδρομής 65 λεπτά, αλλά δεν χρησιμοποιεί το νέο δρόμο κι ο νομάρχης το φέρνει βαρέως. Μήπως υπάρχει κάποια καλύτερη;

Ας ξεκινήσουμε χωρίς προκαταλήψεις, θεωρώντας ότι στα αυτοκίνητα μπορεί να επιβληθεί η συνολικά βέλτιστη λύση. Στο Σχήμα 3 έστω ότι i αυτοκίνητα ακολουθούν την διαδρομή a1 και τα υπόλοιπα $4000 - i$ την a2. Από τα i αυτοκίνητα που έχουν φτάσει στο σημείο 1, τα j τερματίζουν μέσω της 1b, και τα υπόλοιπα $i - j$ παίρνουν την ταχεία οδό που τα προωθεί στο σημείο 2.

Οι συνολικοί χρόνοι για τα αυτοκίνητα σε κάθε κλάδο της διαδρομής φαίνονται στον Πίνακα 2.



Σχήμα 3: Ροές στο οδικό δίκτυο με το νέο δρόμο

Κλάδος	Πλήθος	Χρόνος
a1	i	$i/100$
a2	$4000 - i$	45
1b	j	45
2b	$4000 - j$	$(4000 - j)/100$

Πίνακας 2: Πλήθος και χρόνος κατά κλάδο διαδρομής

Αθροίζοντας τα γινόμενα του πλήθους με το χρόνο, προκύπτει ότι ο συνολικός χρόνος ταξιδιού είναι

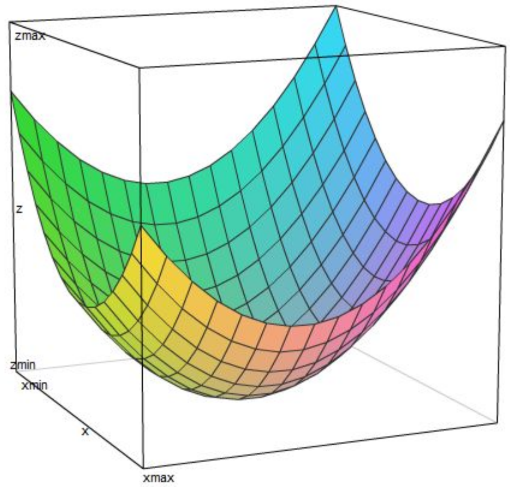
$$T_2(i,j) = \frac{i^2 + j^2}{100} - 45i - 35j + 4000.85$$

λεπτά, ή κατά μέσο όρο για κάθε αυτοκίνητο

$$M_2(i,j) = \frac{i^2 + j^2}{400000} - \frac{9i + 7j}{800} + 85$$

λεπτά. Το ελάχιστο αυτής της συνάρτησης είναι όταν $M_2'(i) = \frac{i}{200000} - \frac{9}{800} = 0$, δηλαδή στο $i = 2250$ και όταν $M_2'(j) = \frac{j}{200000} - \frac{7}{800} = 0$, δηλαδή στο $j = 1750$. Σε αυτό το σημείο η τιμή της συνάρτησης είναι $M_2(2250, 1750) = 64,6875$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 4.

Άρα το όφελος από την διάνοιξη του νέου δρόμου θα είναι μόλις 18,75 δευτερόλεπτα για κάθε αυτοκίνητο κατά μέσο όρο, εφόσον ο νομάρχης επιβάλλει δια ροπάλου την κατανομή των αυτοκινήτων όπως φαίνεται στον Πίνακα 3. Αλλά δεν υπάρχει περίπτωση να τηρηθεί αυτή η κατανομή, αφού τα αυτοκίνητα θα συνειδητοποιήσουν την ανισότητα του χρόνου ανάμεσα στις τρεις διαδρομές.
Για να αποδώσει λοιπόν η επένδυση στο νέο δρόμο, πρέπει τα αυτοκίνητα που κάνουν τη διαδρομή a2b να 'θυσιαστούν' αποδεχόμενα ότι το ταξίδι τους θα διαρκέσει περισσότερο από των άλλων. Ο αλτρουισμός τους θα ανταμειβόταν με 67,5 λεπτά διαδρομής, έναντι των



Σχήμα 4: Γράφημα του μέσου χρόνου M_2

Διαδρομή	Πλήθος	Χρόνος
a1b	1750	$62,5$
a12b	500	45
a2b	1750	$67,5$

Πίνακας 3: Αποτελέσματα από τη βέλτιστη λύση

80 λεπτών της λύσης που αποδίδει η ισορροπία Nash στο επαυξημένο δίκτυο ή των 65 λεπτών του αρχικού δικτύου, αλλά κάποια άλλα θα έφταναν σε μόλις 45 λεπτά. Και τι είναι αυτοί, πιο έξυπνοι; Ο Πίνακας 4 ανακεφαλαιώνει όλα τα αποτελέσματα.

		Λύση		Κόστος
		Nash	Βέλτιστη	αναρχίας
Δίκτυο	Απλό	65	65	1
	Εκτεταμένο	80	64,6875	$\sim 1,24$

Πίνακας 4: Μέσοι χρόνοι διαδρομών

Συνεπώς η προσθήκη του νέου δρόμου βελτιώνει, έστω και οριακά, τη βέλτιστη λύση όπως διαισθητικά αναμενόταν. Το παράδοξο προκύπτει επειδή αυτή η νέα επιλογή που είναι διαθέσιμη στους οδηγούς αυξάνει το κόστος αναρχίας ωθώντας τους να απόσχουν της βέλτιστης λύσης που είναι εφικτή μόνο αν επιβληθεί δια νόμου.

3 Αναρχία ή Κανόνες;

Επειδή υπάρχει η παγίδα να χρησιμοποιήσει κάποιος παραδείγματα από τα μαθηματικά ως σημείο εκκίνησης για να υποστηρίξει κοινωνικές, πολιτικές και οικονομικές επιλογές του, χρειάζεται προσοχή στο πεδίο και στο εύρος εφαρμογής των συμπερασμάτων. Άσε που μερικοί διανύουν την ακριβώς αντίθετη διαδρομή: ξεκινούν έχοντας παγιώσει το αξιακό τους πιστεύω, που είναι μια θεμιτή προσωπική επιλογή (αν και όχι αυτοδικαίως επιθυμητή ή παρεΐστικα ενδιαφέρουσα για κουβέντα), επιζητούν να το ενδύσουν με επιστημονική ρομφαία σταχυολογώντας μαθηματικά μοντέλα και μετρικές που τεκμηριώνουν την ανωτερότητά του.

Πού καταλήγει λοιπόν η μελέτη του κόστους αναρχίας; Μεθοδολογικά ξεκινούμε με την αποτύπωση του ‘παιχνιδιού’ που εκτυλίσσεται. Είναι το πιο απαιτητικό και επίφοβο για σφάλματα και προκαταλήψεις στάδιο μελέτης. Αν καταφέρουμε να μοντελοποιήσουμε πιστά με συγκεκριμένο στρατηγικό παίγνιο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά εργαλεία των θεωρίας παιγνίων για να υπολογίσουμε σημεία ισορροπίας (κυρίαρχες στρατηγικές, κατά Pareto, γνήσια και μικτά σημεία Nash, στρατηγικές maxmin, κλπ). Το κόστος αναρχίας απομυθοποιεί τη σημασία της ισορροπίας Nash. Επίσης, μας δείχνει την ιδιαιτερότητα του παιχνιδιού που μελετούμε.

Ενδιαφέροντα ερωτήματα αφορούν την κατανομή των τιμών κόστους αναρχίας:

- Ένα στοχαστικά ‘τυχαίο’ παιχνίδι τι κόστος αναρχίας έχει;
- Πόσο συχνά απαντώνται παιχνίδια με κόστος αναρχίας να είναι ή έστω να τείνει στη μονάδα;

  Σε τέτοια παιχνίδια η ατομικίστικη συμπεριφορά είναι καλοήθης—δικαιώνεται ο Milton Friedman και η σχολή του Σικάγου.
- Ποιες κατηγορίες παιχνιδιών έχουν απεριόριστο κόστος αναρχίας;

  Σε τέτοια παιχνίδια ένα προστατευτικό πλέγμα κανόνων θα βελτίωνε το κοινωνικό όφελος. Ωστόσο,

  – θα εμπιστευόταν οι παίκτες την ανώτερη αρχή (τον τροχονόμο του οδικού δικτύου);
  – θα επέλεγε η ανώτερη αρχή την κοινωνικά βέλτιστη λύση; Έχοντας ποια προτεραιότητα: τη μέγιστη κοινή ωφέλεια ή τον ισομερισμό της;

Αν απαντούσαμε σε αυτά τα ερωτήματα για τα θεμελιώδη ζητήματα που μας απασχολούν στη ζωή μας, θα μπορούσαμε να τεκμηριώσουμε την κοσμοθεωρητική μας στάση απέναντι στο δίπολο αναρχία-τάξη. Κι αν παρ’ ελπίδα αντιμετωπίσουμε ‘κακοήθη’, ακραία ανταγωνιστικά παιχνίδια, νομιμοποιείται η επιδίωξη της ανατροπής των κανόνων του παιχνιδιού, παρά η σπουδή και αναψηλάφηση του χώρου λύσεων.

Αναφορές

[Gav15] Gaviotis Ioannis, Prisoner’s Dilemma: A Case Study, web article in *igaviotis.wordpress.com*, 2015

[Kou99] Koutsoupias Elias, Papadimitriou Christos, Worst-case Equilibria, *STACS*, vol. 1563, pp. 404-413, 1999

[Mal11] Malkevitch Joe, The Price of Anarchy, *AMS*, web essay, 2011

[New92] Newdick Doug, Anarchy and Game Theory, web article in *www.spunk.org*, after 1992

[Rou07] Roughgarden Tim, Tardos Eva, Introduction to the Inefficiency of Equilibria, ch. 17 in *Algorithmic Game Theory*, 2007

[Rou15] Roughgarden Tim, Intrinsic Robustness of the Price of Anarchy, *Journal of the ACM*, vol. 62, np. 5, 2015